فصل پنجم
سری‌های توانی

تعریف: سری توانی

اگر $(a_n)_{n=0}^{+\infty}$ یک دنباله از اعداد حقیقی و c یک عدد حقیقی ثابت باشد سری $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n$ را یک سری توانی به مرکز c و ضرائب حقیقی a_n می‌نامیم.

نکته: در سری توانی 0^0 رابرابر یک فرض می‌کنیم.

مثال: $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ یک سری توانی به مرکز صفر با ضرائب $a_n = 1$ می‌باشد.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots\dots + x^n + \dots\dots$$

این سری را، سری هندسی می‌نامیم.

قضیه: همگرایی سری هندسی

هر سری هندسی همگراست اگر و تنها اگر قدر مطلق قدر نسبت آن (یعنی جمله x در سری هندسی $\sum x^n$) کمتر از واحد باشد، به عبارتی

$$\text{همگراست} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \Leftrightarrow |x| < 1$$

و اگر همگرا باشد، $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

مثال:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+2}}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\times(-1)}{2^n\times 2^2}=\frac{-1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{-1}{2})^n=$$

$$-\frac{1}{4}\times\frac{1}{1-(-\frac{1}{2})}=-\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=-\frac{1}{6}$$

تعریف: شعاع همگرایی و بازه همگرایی(ناحیه همگرایی) سری

اگر $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-c)^n$ یک سری توانی باشد، ناحیه همگرایی این سری عبارت است از مجموعه همه اعداد حقیقی x که به ازای آن‌ها سری توانی همگرا باشد،یعنی،

$$E=\text{ناحیه همگرایی سری}=\left\{x\in R\mid \text{همگراست}\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-c)^n\right\}$$

و چون ثابت می‌شود که این ناحیه همیشه یک بازه است آن را بازه همگرایی سری نیز می‌نامند.

همچنین شعاع همگرایی سری عبارت است از

$$R=\sup\left\{|x-c|\,|x\in E\right\}=\sup\left\{|x-c|\;\middle|\;\text{همگرا باشد}\quad\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-c)^n\right\}$$

یعنی حداکثر فاصله نقاطی که به ازای آنها سری همگرا ست، تا مرکز سری.

قابل ذکر است که هر سری توانی دست کم به ازای $x=c$ یعنی در مرکز سری همگراست بنابرین ناحیه همگرایی، تهی نیست.

اگر $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-c)^n$ یک سری توانی باشد، به ازای $x=c$ داریم:

$$x=c\Rightarrow\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-c)^n=a_0+a_1\times 0+a_2\times 0+.....+a_n\times 0+....=a_0$$

زیرا حاصل ضرب صفر مطلق در بی‌نهایت برابر صفر است.

مثال: در $\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$ یعنی سری هندسی،

$$E=\left\{x\in R\mid \text{همگراست}\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right\}=\left\{x\mid |x|<1\right\}=(-1,1)\text{ و }R=1$$

قضیه: تعیین شعاع همگرایی سری

اگر $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n$ یک سری توانی باشد، شعاع همگرایی سری برابر است با $R=\frac{1}{\alpha}$ که در آن،

$$\alpha = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \text{ و یا } \alpha = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

مثال: شعاع همگرایی سری‌های زیر را مشخص کنید.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{5^n (n+1)^2}, R=?$$

با توجه به دستورسری توانی در این مثال، $a_n = \frac{1}{5^n (n+1)^2}$، بنابرین $R=\frac{1}{\alpha}$ که در آن

$$\alpha = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{5^{n+1}((n+1)+1)^2}}{\frac{1}{5^n (n+1)^2}} = \frac{1}{5}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2 = \frac{1}{5} \Rightarrow R=\frac{1}{\alpha}=5$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2 x^{2n}}{(\ln(n))^n}, R=?$$

$$a_n = \frac{n^2}{(\ln(n))^n}, R=\frac{1}{\alpha}, \alpha = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2}{(\ln(n))^n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n^{\frac{1}{n}})^2}{\ln(n)}$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\ln(n)}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n)}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0} e^x = e^0 = 1$$

بنابرین در محاسبه $\lim_{n\to+\infty}\frac{(n^{\frac{1}{n}})^2}{\ln(n)}$ صورت کسر به سمت یک و مخرج به $+\infty$ میل می‌کند پس

$$\alpha = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n^{\frac{1}{n}})^2}{\ln(n)} = 0$$

واضح است که در این مثال فرمول $R=\frac{1}{\alpha}$ کاربرد ندارد، در این حالت بطور قرارداد تعریف می‌کنیم $R=+\infty$ و در نتیجه ناحیه همگرایی این سری برابر $E=(-\infty,+\infty)=R$ می باشد.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(nx)^n,\ R=?$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(nx)^n=\sum_{n=1}^{+\infty}n^n x^n \Rightarrow a_n=n^n$$

$$\alpha=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^n}=\lim_{n\to+\infty}n=+\infty$$

در این حالت نیز بطور قرارداد $R=0$ تعریف می‌شود پس ناحیه همگرایی فقط مرکز سری را شامل است یعنی $E=\{c\}=\{0\}$.

تعریف: بسط تو انی تابع یا بسط تابع به صورت سری توانی

اگر Eناحیه همگرایی سری توانی $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-c)^n$ باشد، در این صورت سری توانی $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-c)^n$ را بسط توانی تابع f با دستور زیر، حول نقطهc می‌نامند.

$$f:E\to R$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-c)^n=\lim_{k\to+\infty}\sum_{n=0}^{k}a_n(x-c)^n$$

مثال: $\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$ بسط توانی تابع $y=\frac{1}{1-x}$ برای $-1<x<1$ می‌باشد.

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$$

مثال: به کمک سری هندسی تعیین کنید بسط‌های زیر مربوط به کدام توابع می‌باشند.

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(x-1)^n=?$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(x-1)^n=\frac{1}{1-(x-1)}=\frac{1}{2-x}$$

برای $|x-1|<1$ یعنی $0<x<2$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}}=?$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2^n\times 2}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{x}{2})^n=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2-x}$$

برای $\left|\frac{x}{2}\right|<1$ یعنی $-2<x<2$.

نکته: بنا بر مثال فوق $\sum_{n=0}^{+\infty}(x-1)^n$ و $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}}$ هر دو بسط توانی تابع، $y=\frac{1}{2-x}$ می‌باشند، در حالت کلی ثابت می‌شود هر تابع حول یک نقطه ثابت یک و فقط یک بسط توانی دارد، در مثال بالا بسط‌های اخیر حول دو مرکز به ترتیب بسط اول حول c=1 و بسط دوم حول مرکز $c=0$ بود و این موضوع تناقضی ایجاد نمی‌کند.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{3^{\frac{n}{2}}}=?$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{3^{\frac{n}{2}}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x^2)^n}{(\sqrt{3})^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{x^2}{\sqrt{3}})^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{x^2}{\sqrt{3}})^n-(\frac{x^2}{\sqrt{3}})^0=$$

$$\frac{1}{1-\frac{x^2}{\sqrt{3}}}-1=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-x^2}-1=\frac{x^2}{\sqrt{3}-x^2}$$

برای $\left|\frac{x^2}{\sqrt{3}}\right|<1$ یعنی $x^2<\sqrt{3}$ یعنی $|x|<\sqrt[4]{3}$.

مثال: بسط توانی توابع زیر را مشخص کنید.

$$y=\frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$$

برای $|-x|<1$ و یا $|x|<1$.

$$y=\frac{1}{x+2}$$

$$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{1+1+x}=\frac{1}{1-(-1-x)}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1-x)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(x+1)^n$$

$$|-x-1|<1\Rightarrow|x+1|<1\Rightarrow-1<x+1<1\Rightarrow-2<x<o$$

و یا به روش دیگر

$$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1+\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1-(-\frac{x}{2})}=$$

$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-\frac{x}{2})^n=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{-1}{2})^n x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n$$

برای $\left|-\frac{x}{2}\right|<1$ یعنی $|x|<2$، که البته جواب اول بسط تابع $y=\frac{1}{x+2}$ حول نقطه $c=-1$ و دومی حول c=0 است.

قضیه: مشتق یک سری توانی

اگر $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-c)^n$ بسط توانی تابع f حول نقطه c با شعاع همگرایی R باشد، آنگاه f بر این بازه یعنی (C-R,C+R) مشتق‌پذیر است و داریم:

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}na_n(x-c)^{n-1}$$

یعنی از هر سری توانی می‌شود جمله به جمله مشتق گرفت و دراین صورت سری حاصل، بسط توانی تابع f' با همان شعاع همگرایی خواهد بود.

نکته: اگر از $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n!x)}{n^2}$، جمله به جمله مشتق بگیریم، سری $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!\cos(n!x)}{n^2}$ حاصل می‌شود که واگراست، این مسئله تناقض با قضیه فوق ندارد زیرا این سری یک سری توانی نیست.

مثال: بسط توانی تابع $y=\frac{1}{(1-x)^2}$ را بنویسید.

حل: $y=\frac{1}{(1-x)^2}=(\frac{1}{1-x})'=(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n)'=\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}\Rightarrow\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}$

برای $|x|<1$.

مثال: اگر $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}$، مطلوب است بسط توابع f'', f'.

حل:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}\Rightarrow f'(x)=(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2})'=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nx^{n-1}}{n^2}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n+1}$$

$$\Rightarrow f''(x)=(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n+1})'=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nx^{n-1}}{n+1}$$

با مشتق‌گیری از سری $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n+1}$، جمله اول حذف می‌شود زیرا متغیر x ندارد بنابرین مشتق این سری از جمله $n=1$ آغاز می‌شود.

نکته: ثابت می‌شود که مشتق‌گیری یا انتگرال گرفتن از سری توانی تاثیری بر شعاع همگرایی سری توانی ندارد، در مثال فوق شعاع همگرایی سری توانی مربوط به f, f', f'' هر سه برابر $R=1$ یعنی شعاع همگرایی بسط f می‌باشد.

مثال: بسط توانی تابع f به صورت $\sum_{n=o}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$ می‌باشد

اولاً: شعاع همگرایی سری را مشخص کنید .

ثانیاً: بسط تابع f' را مشخص کنید.

ثالثاً: ضابطه f را بطور دقیق مشخص کنید.

حل: اولاً: اگر R شعاع همگرایی سری باشد.

$$R=\frac{1}{\alpha}\quad,\quad \alpha=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$$

تعریف می‌کنیم $R=+\infty$, $E=(-\infty,+\infty)$ پس اینبسط برای هر $x\in R$ معتبرست.

$$f'(x)=(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!})'=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nx^{n-1}}{n!}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

ثانیا: جمله اول سری به دلیل اینکه عدد ثابت بود پس از مشتق‌گیری حذف شد.

$$\Rightarrow f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n}}{n!}\Rightarrow f'(x)=f(x)$$

برای هر $x\in R$

ثالثا: چون $f'=f$ رویمجموعه اعداد حقیقی، پس بنابر آنچه قبلاً دیده‌ایم (در تعریف تابع نمایی) f ضریب ثابتی از تابع e^x است بنابرین

$$f(x)=ke^x$$

که در آن k یک عدد ثابت می‌باشد برای بیان دقیق تابع f باید ثابت k معلوم شود که برای این منظور به x مقدار می‌دهیم. برای راحتی قرار می‌دهیم $x=0$ (این بسط برای هر $x\in R$ معتبر است)، در این صورت داریم:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n}}{n!}=ke^x\Rightarrow ke^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

$$x=0\Rightarrow k\times e^0=1+0+0+0+\ldots+0+\cdots$$

$$\Rightarrow k=1$$

$$\Rightarrow f(x)=1\times e^x=e^x$$

$$\Rightarrow e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$$

پس $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$ بسط توانی تابع $y=e^x$ روی مجموعهٔ اعداد حقیقی می‌باشد.

قضیه: انتگرال سری توانی

اگر $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-c)^n$ بسط توانی تابع $y=f(x)$ با شعاع همگرایی R، حول نقطه c باشد آنگاه بر هر زیر بازه بسته (C-R,C+R)، تابع f انتگرال‌پذیر است و داریم

$$\int_c^x f(t)dt=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\int_c^x(t-c)^n dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1}$$

به عبارتی از یک سری توانی می‌شود جمله به جمله انتگرال گرفت و سری حاصل بسط توانی تابع $\int_c^x f(t)dt$ با همان شعاع همگرایی خواهد بود.

مثال: بسط تابع $y=\ln(1+x)$ را پیدا کنید.

حل: $y=\ln(1+x)\Rightarrow y'=\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$

برای $|-x|<1$ یعنی $|x|<1$، بنابرین $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$ بسط توانی $(\ln(1+x))'$ حول نقطه $C=0$ می‌باشد و برای یافتن بسط $\ln(1+x)$ باید از $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$ انتگرال بگیریم.

$$\int_0^x\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^n dt=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^x t^n dt=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^x=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

برای $|x|<1$

$$\Rightarrow\ln(1+x)=\int_c^x y'(t)dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^n dt=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

مثال: بسط تابع $y=tg^{-1}(x)$ را تعیین کنید.

حل: $(tg^{-1}(x))'=\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1-(-x)^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}$

برای $|-x^2|<1$ یعنی $|x|<1$.

$$tg^{-1}(x)=\int_c^x\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{2n}dt=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^x t^{2n}dt=$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\Big|_0^x=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

تعریف: بسط تیلور تابع وبسط مک لورن تابع

اگر تابع f بربازه I تا بی‌نهایت مرتبه مشتق‌پذیر باشد و c نقطه‌ای از این بازه، در این صورت برای هر $x\in I$ بجز $x=c$، سری $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$ را بسط تیلور تابع f حول نقطه c می‌نامیم و در حالت خاص، اگر $c=0$ بسط تیلور را بسط مک لورن می‌خوانیم.

بسط تیلور تابع f حول C $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$

بسط مک لورن تابع f، $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

مثال: بسط تیلور توابع زیر را حول نقاط داده شده تعیین کنید.

$f(x)=\sin(x)$: حول $c=0$

در این حالت بسط مک لورن می‌شود.

$$\sin(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n$$

برای یافتن این بسط باید مشتقات متوالی تابع را در نقطه $c=0$ حساب کنیم.

$$f(x)=\sin(x) \qquad f(0)=0$$

$$f'(x)=\cos(x) \qquad f'(0)=1$$

$$f''(x)=-\sin(x) \qquad f''(0)=0$$

$$f'''(x)=-\cos(x) \qquad f'''(0)=-1$$

$$f^{(4)}(x)=\sin(x)$$

و از این مرحله به بعد جملات بالا هر چهار مرتبه، یکبار، تکرار می‌شود یعنی

$$f^{(n+4)}(x)=f^{(n)}(x)$$

$$\Rightarrow \sin(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)x^2}{2!}+\frac{f'''(0)x^3}{3!}+\frac{f^{(4)}(0)x^4}{4!}+\ldots+\frac{f^{(n)}_{(0)}x^n}{n!}+\ldots=$$

$$0+1\times x+0+\frac{(-1)\times x^3}{3!}+0+\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\ldots$$

در بالا دیدیم که مشتقات یک در میان صفر می‌شود و فقط جملات فرد آن هم یکی مثبت و یکی منفی باقی می‌مانند بنابرین،

$$\sin(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

$f(x)=\cos(x)$ حول $c=0$

بطور مشابه

$$f(x)=\cos(x) \qquad f(0)=\cos(0)=1$$

$$f'(x)=-\sin(x) \qquad f'(0)=-\sin(0)=0$$

$$f''(x) = -\cos(x) \qquad f''(0) = -\cos(0) = -1$$

$$f'''(x) = \sin(x) \qquad f'''(0) = \sin(0) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = \cos(x)$$

در تابع $\cos(x)$ هم، مشتقات هر چهار مرتبه، یکبار، تکرار می‌شود و مطابق بالا می‌بینیم که جملات فرد ضریب صفر و جملات زوج، یک در میان ضریب $+1, -1$ دارند بنابرین

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$f(x) = e^x \quad : \quad c = 1$ حول

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!} (x-1)^n$$

$$f^{(n)}(x) = (e^x)^{(n)} = e^x \Rightarrow f^{(n)}(1) = e^x \Big|_{x=1} = e$$

$$\Rightarrow e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e}{n!} (x-1)^n$$

$f(x) = e^x \qquad c = 0$ حول

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^0}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$f(x) = x^2 e^x \qquad : \qquad c = 0$ حول

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \Rightarrow x^2 e^x = x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{n!}$$

$f(x) = e^{-x^2} : c = 0$ حول

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \Rightarrow e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}$$

$f(x) = \cos(\sqrt{x}) \qquad : \qquad c = 0$ حول

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \Rightarrow \cos(\sqrt{x}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (\sqrt{x})^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^n$$

$f(x) = \sin(x)\cos(x) \qquad : \qquad c = 0$ حول

$$f(x) = \sin(x)\cos(x) = \frac{\sin(2x)}{2}$$

$$\sin(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\sin(2x)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(2x)^{2n+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n+1}x^{2n+1}}{2(2n+1)!}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 4^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-4)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

مثال: به کمک بسط توانی توابع، انتگرال‌های زیر را حل کنید.

$$\int\frac{\sin(x)}{x}dx=?$$

$$\sin(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\Rightarrow\frac{\sin(x)}{x}=\frac{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}}{x}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$$

$$\Rightarrow\int\frac{\sin(x)}{x}dx=\int\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int x^{2n}dx$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+k$$

$$\int e^{x^2}dx=?$$

$$e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\Rightarrow e^{x^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x^2)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{n!}\Rightarrow$$

$$\int e^{x^2}dx=\int\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{n!}dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\int x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!(2n+1)}x^{2n+1}+k$$

$$\int\frac{\cos(x)}{x}dx=?$$

$$\cos(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\Rightarrow\frac{\cos(x)}{x}=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n-1}$$

$$\Rightarrow\int\frac{\cos(x)}{x}dx=\int\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n-1}dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\int x^{2n-1}dx$$

$$= \int \frac{1}{x} dx + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int x^{2n-1} dx = Ln|x| + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{x^{2n}}{2n}$$

$$= Ln|x| + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n \times (2n)!} x^{2n} + k$$

در مثال فوق می‌بینیم که یک روش دیگر انتگرال‌گیری این است که ابتدا بسط توانی تابع زیر انتگرال را یافته و سپس، از این بسط جمله به جمله انتگرال بگیریم.

بیان این روش که به روش سری‌ها در حل انتگرال معروف می‌باشد، در واقع یک هدف اصلی از بیان این فصل بود.

چند بسط تیلور که اغلب مورد نیاز است.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \qquad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \qquad |x| < 1$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \forall x$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$$tg^{-1}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

$$Ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

تمرین

۱. شعاع همگرایی سری‌های توانی زیر را محاسبه کنید.

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n+1}\ ,\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n+1}\ ,\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\ ,\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\times5\times8\times\ldots\times(3n-1)}{2\times4\times6\times\ldots\times2n}x^n$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3\times5\times7\times\ldots\times(2n+1)}{4\times9\times14\times\ldots\times(5n-1)}(x-1)^n\ ,\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}\ ,\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x^2)^n}{n+1}$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n^2x^{2n}}{Ln^n(n)}\ ,\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{5^n(n+1)^2}\ ,\ \sum_{n=1}^{+\infty}n^nx^n$$

۲. بسط توانی توابع زیر را تعیین کنید.

$$y=\frac{1}{1-x}\ ,\ y=\frac{1}{1+x}\ ,\ y=\frac{1}{x+2}\ ,\ y=\frac{1}{2x+1}\ ,\ y=\frac{1}{x}\ ,\ y=\frac{1}{1-x^2}$$

$$y=\frac{1}{1+x^2}\ ,\ y=\frac{x^2}{1-x^2}\ ,\ y=Ln(1+x)\ ,\ y=tg^{-1}(x)\ ,\ y=\frac{\sin(x)}{x}$$

$$y=x^2e^x\ ,\ y=e^{-x^2}\ ,\ y=x^2\cos(\sqrt{x})\ ,\ y=\sin(x)\cos(x)$$

۳. بسط توانی تابع $y=x^5-2x^4+x^3-x^2+2x-1$ حول نقطه $C=1$ را بنویسد.

۴. تعیین کنید هر یک از بسط‌های زیر مربوط به کدام تابع می‌باشند.

$$\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\ ,\ \sum_{n=0}^{+\infty}(x-1)^n\ ,\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}}\ ,\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$$

۵. به کمک بسط توانی توابع (روش سری‌ها) انتگرال‌های زیر را حل کنید.

$$\int\frac{1-\cos(x)}{x^2}dx\ ,\ \int_0^1\sqrt{x}\sin(x)dx$$

$$\int e^{-x^2}dx\ ,\ \int\frac{\sin(x)}{x}dx\ ,\ \int_0^1\sin(x^2)dx$$

۶. به کمک بسط توانی تابع $y=Ln(x+1)$ ، $\int\frac{Ln(x+1)}{x}dx$ را حساب کنید.